

稀疏盲源分离问题的恢复性研究

王华丹, 刘海林

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510006)

摘要: 采用稀疏分量分析方法, 研究了基于稀疏表示的欠定混叠盲信号分离的可恢复性, 给出了在 l^2 范数下, 源信号可恢复的充分必要条件, 并进一步讨论了 l^2 范数解对噪声的鲁棒性.

关键词: 欠定混叠; 盲信号分离; 稀疏表示; l^2 范数解

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2008)02-0044-03

近些年, 稀疏分量分析受到有关学者的极大关注, 而欠定混叠盲信号分离 (即源信号的数目多于观测信号的数目) 算法便是其一个重要的应用. 目前, 人们通常用独立分量分析 (ICA) 来处理盲信号分离问题 (BSS), 然而在混叠矩阵是欠定的情况下, ICA 一般不能恢复出所有的源信号^[1-4]. 基于稀疏表示的盲信号分离能处理 ICA 算法很难处理的两种情况: 1) 源信号非统计独立; 2) 混叠矩阵是欠定的情形. 事实上, 一些基于稀疏表示的盲信号分离算法已被广泛应用在盲信号分离问题中, 如最大后验概率法^[5]、最大似然估计法^[6]以及分别估计混叠矩阵和源信号的二阶段方法等. 另外对于加噪情形下的稀疏信号^[7-9]的性质也有了一定的研究.

人们普遍关注此类问题算法的实现, 即找到一个有效的算法可以恢复出源信号; 而对源信号的可恢复性, 即恢复的信号是否就是真正的源信号, 或者在怎样的条件下恢复的信号就是源信号等问题论述不多. Li 和他的同事们在研究算法的同时运用概率知识对源信号的恢复性作了一些论述^[7, 10].

文献 [7] 中分析了基于稀疏表示的欠定盲信号分离问题的二阶段法 (clustering-then- l^1 -optimization approach), 讨论了 l^1 范数解的唯一性及对噪声的鲁棒性, 并进一步运用概率的知识分析了 l^1 范数解与 l^2 范数解的等价性. 在文献 [10] 中, Li 和他的同事们扩展了文献 [11]、[12] 的结论, 得到了单个源向量 $s(k)$ 可恢复的充要条件, 并且运用此充要条件进一步证明了几个与恢复性相关的不等式, 这些不等式都是描述源信号 $s(k)$ 的非零元的数目、观测信号的数目以及源信号的数目与恢复性的关系的.

文献 [10] 中给出了 l^1 范数解可恢复的充要条

件, 可是限制条件非常繁琐. 不但要确定真实解非零元的个数 (对其稀疏性有很高的要求), 而且还要知道非零元取值正负的标号集以及其它约束条件. 虽然可以转化成标准线性规划问题来解决, 但是要实现仍然很难. 本文将大大简化约束条件, 给出 l^2 范数解可恢复的充要条件, 并且讨论 l^2 范数解对噪声的鲁棒性.

1 问题的描述

考虑欠定混叠盲信号分离的无噪模型和加噪模型:

$$X = AS, \quad (1)$$

$$X = AS + V \quad (2)$$

其中 $X \in \mathbf{R}^{n \times K}$ 是观测信号矩阵, $A \in \mathbf{R}^{n \times m}$ 和 $S \in \mathbf{R}^{m \times K}$ 分别是混叠矩阵和源信号矩阵, $V \in \mathbf{R}^{n \times K}$ 是噪声矩阵且 $n < m$.

2 l^2 范数解与真实解相等的充要条件

盲信号分离问题就是只使用观测信号矩阵 X 来恢复源信号. 在传统的两阶段方法中, 混叠矩阵 A 在第一阶段被恢复, 第二阶段通过解决 K 个优化问题来估计源信号 S :

$$\min \sum_{j=1}^m |s_j(j)|, \quad (3)$$
$$\text{s.t. } As(k) = x(j).$$

其中 $j = 1, 2, \dots, K$.

从文献 [7] 中, 得出这样一个结论: 即当源信号是充分稀疏时, 源信号就能以一个较高的概率被充分恢复出来, 显然对源信号的稀疏性要求非常高. 本文通过优化问题 (4) 来估计源信号 S

$$\min \|s\|^2, \quad (4)$$

$$s^T A s(j) = x(j).$$

其中 $j = 1, 2, \dots, K$.

为简化问题, 用优化问题 (5) 来代替 (4) 进一步进行讨论.

$$(P_2) \quad \min \|s\|^2, \quad (5)$$

$$s^T A s = x^*.$$

其中 $A s^* = x^*$, $s^* \in R^m$ 是真实的解向量. 并设 s_2 是 (P_2) 问题的解向量.

定理 1 $s^* = s_2$ 当且仅当对任何满足 $A \delta = 0$ 和 $\|\delta\|_2 = 1$ 的 δ 式 (6) 都成立.

$$\sum_{i=1}^m \delta_i s_i^* = 0 \quad (6)$$

证明

必要性: 假设 $s^* = s_2$, 即 $\|s^*\|_2$ 是 (P_2) 问题的最优解. 取一个充分小的 t 有

$$\begin{aligned} \|s^* + t\delta\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m (s_i^* + t\delta_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m s_i^{*2} + 2t \sum_{i=1}^m s_i^* \delta_i + t^2 \sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \\ \|s^*\|_2^2 + 2t \sum_{i=1}^m s_i^* \delta_i + t^2 \|\delta\|_2^2 &> \|s^*\|_2^2. \end{aligned}$$

所以有

$$2t \sum_{i=1}^m s_i^* \delta_i + t^2 \|\delta\|_2^2 > 0 \quad (7)$$

由 $\|\delta\|_2 = 1$, t 充分小以及式 (7), 有 $\sum_{i=1}^m \delta_i s_i^* = 0$ 必要性得证.

充分性: 假设 s 是 (P_2) 问题的一个可行解, 则 s 可被表示成

$$s = s^* + t^* \delta \quad (8)$$

其中, $\delta = \frac{s - s^*}{\|s^* - s\|_2}$, $t^* = \|s^* - s\|_2$

可容易得到 δ 满足方程 $A \delta = 0$, $\|\delta\|_2 = 1$ 由定

理的条件, 有 $\sum_{i=1}^m \delta_i s_i^* = 0$ 而且

$$\begin{aligned} \|s^* + t\delta\|_2^2 &= \sum_{i=1}^m (s_i^* + t\delta_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m s_i^{*2} + 2t \sum_{i=1}^m s_i^* \delta_i + t^2 \sum_{i=1}^m \delta_i^2 = \end{aligned} \quad (9)$$

$$\|s^*\|_2^2 + 2t \sum_{i=1}^m s_i^* \delta_i + t^2 \|\delta\|_2^2 \geq \|s^*\|_2^2.$$

当 $t = 0$ (即 $s^* = s$) 时, 式 (9) 最后一步的等号成立.

因此对满足 (P_2) 问题的所有可行解, 都有

$$\|s\|_2^2 \geq \|s^*\|_2^2 \quad (10)$$

且当 $s^* = s$ 时等号成立. 因此有 $s^* = s_2$ 充分性得证.

在上面的定理 1 中, 若假设 s^* 是 l^p 范数解 (即最稀疏的解) 就可得到 l^p 范数解与 l^2 范数解等价的充要条件.

3 l^p 范数解在加噪情况下的鲁棒性

下面考虑优化问题 (P_2) 的加噪情形, 据此分析证明 l^p 范数解对噪声的鲁棒性.

重述下面的加噪模型:

$$(P'_2) \quad \min \|s\|^2, \quad (11)$$

$$s^T A s + v = x$$

其中 $v \in R^n$ 是一个噪声向量.

对于给定的混叠矩阵 A 和观测信号 x , 令 s_v^* 为优化问题 (P'_2) 的解向量. 文献 [7] 中, Li 和他的同事们已经讨论了 l^p 范数解和 l^1 范数解对噪声的鲁棒性. 根据他们的讨论, 得到 l^1 范数解对噪声具有鲁棒性而 l^p 范数解对噪声不具有鲁棒性.

现在, 分析 (P_2) 问题的解对噪声的鲁棒性. 根据文献 [7] 中的定理 1 有 $\|s_2\|_0 \leq n$, 为简化只考虑 $\|s_2\|_0 < n$ 的情形.

定理 2 $\|s_v^* - s_2\|_2 \leq M \|v\|_2$, 其中 s_v^* , s_2 分别是优化问题 (P'_2) 和 (P_2) 的解.

证明 令 $\|s_2\|_0 = l < n$, 假设 (P_2) 问题的解 s_2 的非零元的指标集为 $(i_1, i_2, \dots, i_l)$, 矩阵 A_l 由矩阵 A 的指标集为 $(i_1, i_2, \dots, i_l)$ 的所有 l 个列向量组成, l 维向量 s_l 由向量 s_2 所有非零元组成. 因此, 有

$$x = A_l s_l \quad (11)$$

考虑已知方程

$$x = A_l s_v^* + v \quad (12)$$

有

$$s_v^* = A_l^+ x - A_l^+ v \quad (13)$$

其中 $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$.

因此

$$\begin{aligned} \|s_v^*\|_2 &= \|A_l^+ x - A_l^+ v\|_2 \leq \|A_l^+ x\|_2 + \|A_l^+ v\|_2 \leq \\ &\leq \|s_l\|_2 + \|A_l^+\|_2 \|v\|_2. \end{aligned} \quad (14)$$

定义

$$\alpha = \min \{ \|s\|_2 - \|s_2\|_2, x = A s, A \neq A_l \}, \quad (15)$$

其中 A 是 A 的一个 $n \times l$ 维子矩阵.

由于除了子矩阵 A_l 外矩阵 A 有 $C_m^l - 1$ 个 l 维子矩阵以及 (P_2) 问题的解 s_2 以概率 1 是唯一的, 得到 α 以概率 1 大于零.

而且考虑已知方程

$$x = As^v + v \quad (16)$$

有

$$\bar{s}^v = A^+ x - A^+ v \quad (17)$$

由方程 (17)、(15) 和 (14), 有

$$\begin{aligned} \|\bar{s}^v\|_2 &\geq \|A^+ x\|_2 - \|A^+ v\|_2 \geq \|s\|_2 - \|A^+\|_2 \|v\|_2 \geq \\ &(\|s_2\|_2 + \alpha) - \|A^+\|_2 \|v\|_2 \geq (\|s_l\|_2 + \alpha) - \\ &\|A^+\|_2 \|v\|_2 \geq (\|s^v\|_2 - \|A^+\|_2 \|v\|_2 + \alpha) - \\ &\|A^+\|_2 \|v\|_2 = \|s^v\|_2 + \alpha - 2M\|v\|_2. \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $M = \max\{\|A^+\|_2\}$, A 是矩阵 A 的一个 $n \times l$ 维子阵.

由式 (18) 知, 如果 $\|v\|_2 < \frac{\alpha}{2M}$ 则有 $\|\bar{s}^v\|_2 > \|s^v\|_2$

即 $\bar{s}^v = s_2^v$, 其中 s_2^v 由向量 s_2^v 的所有非零元组成, 这就意味着 s_2^v 与 s_2 具有相同的非零元指标集.

由方程 (13) 和 (11), 有

$$\begin{aligned} \|s^v - s_l\|_2 &= \|A_l^+ - A_l^+ v - A_l^+ x\|_2 = \\ &\| - A_l^+ v \|_2 \leq \|A_l^+\|_2 \|v\|_2 \leq M \|v\|_2. \end{aligned}$$

也就是

$$M \|v\|_2 \geq \|s^v - s_l\|_2 = \|s_2^v - s_l\|_2 = \|s_2^v - s_2\|_2.$$

$\|s_2\|_0 = n$ 的情况同理可证.

从上面的分析得到 (P_2) 问题的解对噪声具有鲁棒性, 因此得到下面的结论: (P_2) 问题的解对噪声具有或者至少在在一定程度上具有鲁棒性.

虽然 l^0 范数解是最稀疏的, 但是却不容易通过最小化 l^0 范数来得到. 原因有: 1) 如果 l^0 范数解的非零元的个数是 n , 那么其解一般是不唯一的; 2) 到目前为止没有有效的可以求解 l^0 范数解的方法; 3) l^0 范数解对噪声不具有鲁棒性, 而 l^2 范数解在这些方面明显优势于 l^0 范数解.

4 结论

本文讨论了基于稀疏表示的欠定盲信号分离两阶段算法的恢复性问题, 在混叠矩阵已知的情况下, 分析 l^2 范数解可恢复的充要条件, 虽然实现起来不

是很方便, 但却简化了问题的约束条件. 据本文论证 l^2 范数解对噪声具有或者在一定程度上具有鲁棒性, 故在求解最稀疏解时最小化 l^2 范数也不失为一个好的方法.

参考文献:

- [1] Erkksson J, Koivunen V. Identifiability and separability of linear ICA models revisited[C]// Proceeding of Fourth International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation. Japan, Nara, 2003.
- [2] Davies M. Identifiability issues in noisy ICA[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(5): 470-474.
- [3] Cardoso J-F. Blind signal separation: statistical principles[J]. Proc IEEE, 1998, 86(10): 2009-2025.
- [4] Li Y, Wang J. Sequential blind extraction of linearly mixed sources[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, 50(5): 997-1007.
- [5] Zibulevsky M, Pearlmutter B A. Blind source separation by sparse decomposition in a signal dictionary[J]. Neural Computation, 2001, 13(4): 863-882.
- [6] Lee T W. Blind source separation of more sources than mixtures using overcomplete representation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, 6(4): 87-90.
- [7] Li Yuan-qing, Andrzej Cichocki, Shun-ichi Amari. Analysis of sparse representation and blind source separation[J]. Neural Computation, 2004, 16: 1193-1234.
- [8] Fuchs J J. Recovery of exact sparse representations in the presence of noise[C]// Proc of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. Canada, Montreal, 2004.
- [9] Donoho D L, Elad M, Temlyakov V N. Stable recovery of sparse overcomplete representations in the presence of noise[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(1): 6-18.
- [10] Li Yuan-qing, Shun-ichi Amari. Underdetermined blind source separation based on sparse representation[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2006, 54(2): 423-437.
- [11] Gribonval R, Nielsen M. Sparse representations in unions of bases[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2003, 49(12): 3320-3325.
- [12] Donoho D L, Elad M. Maximal sparsity representation via l^1 minimization[J]. Proc National Academy Science, 2003, 100: 2197-2202.

(下转第 53 页)

温度 $\pm 1\text{ }^{\circ}\text{C}$ 内所需的时间)

5 结论

家用燃气壁挂炉水温的恒温控制存在外部因素复杂、系统的非线性及时变特性等不利条件, 很难抽象出合理的数学模型. 本文使用了模糊控制, 利用先验的判断大大优化了系统的控制. 实验表明, 该算法大大改善了水温的收敛时间, 而且精度非常高, 是可行的高效智能快速算法.

参考文献:

[1] 李前卫. 燃气热水器的模糊控制算法 [J]. 能源技术, 2003, 24(4): 173-177.

[2] 杜福银, 徐扬. 家用燃气热水器自适应模糊控制策略 [J]. 工业加热, 2005, 34(6): 20-22.

[3] 朱荣明, 戴冠中. 燃气热水器水温智能控制系统 [J]. 西北工业大学学报, 2001, 19(1): 69-71.

Fast Control Algorithm Based on Fuzzy Control

Tan Yuan-Qiang, Wang Fu-Long, Li Ling-Li
(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract A fast control algorithm, based on fuzzy control, can be used to shorten the heating time of domestic gas boilers. The experiment shows that the output temperature can be restricted in an acceptable range, and that the result of temperature control is better.

Key words fuzzy control; control algorithm; domestic gas boiler

(上接第 46 页)

Recoverability Analysis of Sparse Blind Source Separation

Wang Hua-dan, Liu Hai-lin
(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract By adopting the method of sparse component analysis, it discusses the recoverability of underdetermined blind source separation based on sparse representation. It establishes the sufficient and necessary conditions of source's recoverability under ℓ^2 -norm. And it further discusses the robustness of the ℓ^2 -norm solution to additive noise.

Key words underdetermined mixing; blind source separation; sparse representation; ℓ -norm solution